

MODELO DE CALIDAD DE ESTACIÓN PARA *PINUS PINEA* L. EN LAS MASAS DEL SISTEMA CENTRAL (VALLES DEL TIÉTAR Y ALBERCHE), MEDIANTE APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA POR GOELZ & BURK (1992)

M.N. CAÑADAS⁽¹⁾, R. CALAMA⁽²⁾, C. G. GÜEMES⁽³⁾, G. MONTERO⁽²⁾

(1) C/ Padre Oltra, 2º Int-dcha 28019 Madrid. nieves.canadas@terra.es

(2) Dpto. Silvicultura. CIFOR-INIA. Ctra. Coruña, km.7,5. 28040 Madrid.

(3) Consejería Medio Ambiente - Junta de Castilla y León. C/ Juan Padilla s/n. 09006. Burgos.

Resumen

Los datos de cinco inventarios sucesivos de cuatro parcelas permanentes, así como los de 21 análisis de tronco realizados a pinos dominantes distribuidos por ocho zonas diferentes de la región de estudio, son empleados para el ajuste de un modelo de calidad siguiendo el método propuesto por GOELZ & BURK (1992), derivado de realizar una expansión de parámetros a la forma diferencial de la ecuación de Richards. El método considera todas las posibles diferencias entre mediciones de cada familia de datos (árbol o parcela), y trata el problema de la correlación entre ellos mediante la expansión del error residual. Se obtiene un modelo polimórfico que cuenta con las propiedades de invarianza respecto de la edad típica, y la continuidad. Para su ajuste se considera la edad medida a la altura normal (1,30m) por la gran incidencia de pastoreo en la región, que impide crecer a los pinos jóvenes con regularidad. La evaluación estadística del modelo ajustado aporta buenos resultados, e incluye un análisis de sensibilidad de los parámetros.

P.C.: índice de sitio / invarianza / correlación entre datos / análisis de sensibilidad.

INTRODUCCIÓN

Las Curvas de Calidad no son más que modelos que describen o predicen la evolución de la altura dominante de masas arbóreas regulares de una especie con respecto a su edad, evolución que varía según el medio donde dichas masas vegeten. Por ello, constituyen el método más universalmente empleado para, a partir de ellas y como aplicación de la Ley de Eichhorn (ASSMANN, 1970), inferir la calidad de las estaciones forestales, para lo que se toma como índice (*site index*) la altura dominante que alcanza la masa a una edad que se determina (*edad típica*).

Existe una gran variedad de procedimientos para la fijación de modelos de curvas de calidad, habiéndose demostrado, en todo caso, que es preferible el empleo de datos ‘longitudinales’ o series reales de crecimiento en altura (obtenidas de mediciones sucesivas en parcelas permanentes, o de la realización de análisis de troncos a pies dominantes), que el empleo de datos ‘transversales’ o temporales, que sólo se han medido una vez, y suponen la necesidad de asumir que la distribución de las masas en una región, respecto de las calidades de estación presentes en ella, es idéntica a lo largo de todas las edades, que no suele ser cierto.

Por otro lado, de entre las ecuaciones empleadas para la modelización ‘altura dominante-edad’ son preferibles las que describen el cambio en tamaño de los seres vivos, capaces de expresar los dos factores opuestos que controlan el crecimiento: la tendencia intrínseca hacia el aumento ilimitado (potencial biótico: absorción de nutrientes, fotosíntesis, anabolismo, etc) -que prevalece en el comienzo de la vida del árbol-, y las limitaciones o restricciones impuestas por el medio exterior (reservas limitadas, catabolismo, etc) -que se vuelve más aparente hacia el final-. Sólo algunas expresiones matemáticas son capaces de integrar correctamente esos dos procesos (ZEIDE, 1993), dando lugar en su representación a curvas sigmoidales, con asíntota y punto de inflexión.

A partir de alguna de esas ecuaciones de crecimiento, y empleando datos longitudinales, se han desarrollado gran parte de los procedimientos de ajuste de curvas de calidad publicados recientemente. Entre ellos, los que parten de formas diferenciales de las expresiones de crecimiento, obtienen modelos ajustados con atributos muy deseables (GOELZ & BURK, 1992), entre los que destacan:

- polimorfismo, que confiere flexibilidad al haz de curvas resultante, al asumir que las pautas de crecimiento de la especie no son necesariamente iguales para todas las calidades, como se ha comprobado que, de hecho, ocurre en varias especies (p. ej. CARMEAN & LENTHALL, 1989);

- invarianza respecto de la edad típica elegida obteniéndose modelos que en una única expresión, y para un amplio rango de edades (según los datos empleados para el ajuste) son capaces de predecir correctamente cualquier altura a cualquier edad, de modo que la edad típica y el índice de sitio pueden ser uno de los pares cualesquiera edad-altura previamente no identificados, y que se pueden elegir una vez fijado el modelo.
- continuidad, obteniéndose modelos capaces de describir un haz infinito de curvas de calidad. Lo que significa que para una edad típica cualquiera que se escoja, cada par de valores conocidos edad-altura dará lugar a una curva, y por tanto a un valor específico del índice de sitio. Es una propiedad muy interesante para la posterior utilización del índice de sitio como variable independiente en otros modelos, como los de crecimiento.
- Desde el punto de vista operacional, el empleo de métodos de ecuaciones diferenciales permite aprovechar para el ajuste todas las series longitudinales de datos disponible, aunque sean de diversas edades, y varias de ellas no lleguen a la edad que se establecerá como típica.

El principal inconveniente que surge en el ajuste de estos modelos deriva del manejo de los datos longitudinales, y es común a los métodos que emplean este tipo de datos: la correlación que existe entre ellos al realizar mediciones sucesivas sobre el mismo individuo hace que no se cumpla la hipótesis de independencia de la que parte el ajuste por mínimos cuadrados ordinarios, por lo que exige un tratamiento estadístico particular. Si el problema se ignora, el estimador de la matriz de covarianzas de las estimaciones de parámetros de la ecuación estará sesgada, invalidando cualquier test de hipótesis que se realice sobre la ecuación (incluyendo los más básicos).

MATERIAL Y MÉTODOS

Datos

Se dispone de datos longitudinales procedentes, respectivamente, de cinco inventarios sucesivos de cuatro parcelas permanentes INIA, así como de 21 análisis de tronco realizados a pinos dominantes distribuidos por ocho zonas diferentes dentro de la región de estudio.

La edad de referencia que se toma es la *edad normal* (a 1,30m) ya previamente utilizada por diversos autores (como MONSERUD, 1984; JOHANSSON, 1996, etc.), y que se considera especialmente indicada en este caso, dada la fuerte incidencia del pastoreo en la región, que recome los brotes de los pinos pequeños, impidiendo desarrollarse al árbol con normalidad, hasta que éste consigue sobrepasar, al menos, el metro de altura total.

- Parcelas permanentes: De forma rectangular y superficie entre 1000 y 1600m², se instalaron en la primavera de 1966 realizándose entonces el primer inventario y, el resto en primavera de los años 1971, 1981, 1990 y 1997. En cada uno de ellos se midieron:

- diámetros normales cruzados de todos los pies, con precisión de milímetros, en el lugar señalado sobre la corteza con pintura, en forma de T invertida.
- la altura total de 40 pies, con precisión de decímetro: tomando diez de entre los más gruesos, y otros treinta más distribuidos por todas las clases diamétricas presentes.

La edad media 'normal' (a 1,30m) de las parcelas se obtuvo de su medición, con barrena de Pressler en, al menos cinco árboles de cada parcela, en el último inventario. Para hallar la altura dominante correspondiente a cada inventario, hubo que seleccionar y ajustar primero una curva de alturas de la masa (CAÑADAS *et al.*, 1999), tomándose una de la forma $h = 1,30 + b_1 \cdot (1 - e^{(-b_2 \cdot d)})$, ecuación que parece funcionar bastante bien en la mayoría de los casos, y no sólo dentro de este tipo de parcelas, sino también en otras las parcelas temporales regulares ensayadas. Una vez establecida esta curva, se introdujo el valor del diámetro dominante, correspondiente a la media de los 100 pies más gruesos por hectárea (criterio de Assmann), obteniendo así la altura dominante en cada caso.

- Análisis de tronco. Se han empleado dos grupos de datos: por un lado, los de doce análisis de tronco que fueron realizados en 1966, en el momento del replanteo de las parcelas permanentes INIA. Se aparearon tres árboles dominantes en torno a cada una de las cuatro parcelas, cortándose los troncos a 0,30m del suelo, y posteriormente a intervalos de 2,5m, y en un punto intermedio en la troza final. Los anillos de cada corte eran contados *in situ*. Por otro lado, para el desarrollo del presente trabajo, se han realizado otros nueve análisis de tronco más distribuidos en otros cuatro rodales diferentes, escogiéndose árboles dominantes (los de diámetros más gruesos), rectos, bien formados, y sin daños aparentes. A los pies derribados, se les medía su altura total, realizando además, en laboratorio, un

conteo de anillos para la estimación de la edad de las rodajas obtenidas en la base, a unos 0,30m del suelo, y a partir de ahí, de las cortadas de metro en metro (1,30m, 2,30m, 3,30m.....).

Para cada árbol se ha corregido la edad resultante del conteo de anillos en las rodajas, para ajustarlas a la edad de referencia normal. Seguidamente, las alturas también han sido algo modificadas en relación con las edades a que estaban asignadas, al aplicar a cada par 'edad normal - altura' la corrección propuesta por CARMEAN (1972).

Metodología propuesta por GOELZ & BURK (1992). Aplicación

GOELZ & BURK (1992) desarrollaron un modelo de altura dominante a partir de modificaciones de la ecuación de Richards. Como buscaban un modelo que pudiese predecir la altura dominante a una determinada edad, a partir de la altura dominante conocida a cualquier otra edad, comenzaron por expandir los parámetros de la ecuación de Richards como posibles funciones de la altura y la edad:

$$H_i = f_1(H_{(i)}t_{(i)}) \cdot [1 - \exp(-f_2(H_{(i)}t_{(i)}) \cdot t_i)]^{f_3(H_{(i)}t_{(i)})}$$

(siendo f_1 la función que representa el parámetro a de la ecuación de Richards -que determina la asíntota-; f_2 la que representa el parámetro b -parámetro de escala-; f_3 , la que representa el parámetro c -parámetro de forma, que determina la localización del punto de inflexión-; y $H_{(i)}$ y $t_{(i)}$ representan, otra altura y edad distinta de H_i y t_i , respectivamente).

A raíz de los ensayos realizados empleando dicha expresión (con datos de 141 parcelas de *Pinus banksiana* Lamb, ajustando previamente la ecuación de Richards a cada una de ellas) encontraron que para los tres parámetros existía una fuerte relación lineal con la altura, para cada edad. A partir de las expansiones de parámetros ensayadas, y utilizando una forma diferencial de la ecuación de Richards, intentaron fijar una forma general que valiese para todo el conjunto de datos, pero tras múltiples intentos no lograron una ecuación que convergiera de forma plenamente satisfactoria. En lugar de seguir expandiendo parámetros (lo que daría lugar a que para la predicción de una altura a una edad dada, se necesitaran dos o tres pares 'edad - altura' conocidos), expandieron el número de datos, de manera que tomaron en cuenta todas las posibles diferencias entre mediciones de cada parcela. Y de esta forma, obtuvieron que los parámetros estimados en la fórmula general eran mucho más cercanos a los que se obtenían cuando se ajustaban las parcelas individuales por separado -y por tanto, más reales-. Por último, cierta dependencia detectada todavía de los parámetros con respecto a la edad, comprobaron que se corregía mejor resolviendo para el parámetro a en la ecuación de Richards, y sustituyendo por su función de la edad y del resto de parámetros. Tras todo el proceso, el modelo final que los autores encontraron como más satisfactorio es el siguiente:

$$H_i = 1.3 + (H_j - 1.3) \cdot \frac{\left[1 - \exp\left(-b_1 \cdot \left(\frac{H_j}{t_j}\right)^{b_2} \cdot t_j^{b_3} \cdot t_i\right) \right]^{b_4}}{\left[1 - \exp\left(-b_1 \cdot \left(\frac{H_j}{t_j}\right)^{b_2} \cdot t_j^{b_3} \cdot t_j\right) \right]} + e_{ij}$$

donde: H_j y t_j representan las edades y alturas predictoras; H_i representa la altura que se va a predecir a la edad t_i ; b_1, b_2, b_3, b_4 son parámetros, y e_{ij} el error.

En cuanto a la estructura especial de los errores del modelo, los autores explican que, en general, dado un modelo de expresión $Y_i = f(X_i, \beta) + e_i$ (con X_i variables independientes y β el vector de parámetros), para permitir la correlación de primer orden, el término del error debiera tomar la forma: $e_i = \rho \cdot \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i$, siendo los ε_i ahora independientes entre sí. Ahora bien, dada la forma particular de los datos que se utilizan en este caso, la situación es algo diferente, debiéndose expandir el término identificador del error de la siguiente manera:

$$Y_{ij} = f(X_i, Y_j, X_j, \beta) + e_{ij}; \quad e_{ij} = \rho \cdot \varepsilon_{i-1,j} + \gamma \cdot \varepsilon_{i,j-1} + \varepsilon_{ij}$$

(donde Y_{ij} representa la predicción de la altura i usando Y_j (altura j), X_i (edad i), y X_j (edad $j \neq i$) como variables predictoras; β es el vector de parámetros; ρ representa la autocorrelación entre el residuo

actual (correspondiente a la estimación Y_{ij}), y el residuo correspondiente de la estimación Y_{i-1} usando Y_j como variable predictora; γ representa la relación entre el residuo actual y el residuo procedente de estimar Y_i usando Y_{j-1} como variable predictora; y ε_{ij} representa los errores independientes, cuyo valor como media es 0 y varianza η^2).

- En este trabajo, el modelo descrito de Goelz y Burk ha sido aplicado para los datos longitudinales disponibles, operándose mediante doble ajuste de la siguiente forma: en primer lugar, una base de datos ‘expandida’ ha sido creada, tal que para cada par de valores ‘edad altura’, se han considerado todos los otros pares de valores posibles de la serie de datos, como variables predictoras. Seguidamente, con estos datos, se ha realizado un primer ajuste del modelo expuesto para obtener los valores de los parámetros con los residuos correspondientes. A partir de esto, otra nueva base de datos que integrara los valores de $\varepsilon_{i-1,j}$, y $\varepsilon_{i,j-1}$ ya obtenidos, fue creada; base de datos que finalmente ha servido para el ajuste definitivo del modelo incluyendo la expresión del error e_{ij} . Se obtiene así, junto con el valor de ρ y γ , el valor ya definitivo de los parámetros b_1, b_2, b_3 y b_4 .

Para el ajuste, se ha considerado siempre una sola serie de datos por parcela o rodal. En el caso de los datos de análisis de tronco, no se han empleado éstos directamente, sino que se ha escogido en cada período la mayor de las alturas disponibles (de los análisis) en cada parcela, con el fin de evitar así, en lo posible, los problemas de intercambio de dominancia.

Una vez ajustado el modelo, se ha escogido la edad típica (normal) de 100 años, que se acerca bastante a los turnos habituales establecidos para las masas de piñonero en la zona, pudiéndose así tener una idea del desarrollo de las masas para esa edad normal.

Evaluación estadística del modelo

Durante la realización del trabajo no se disponía de datos externos para efectuar una validación, por lo que sólo se ha llevado a cabo una evaluación del modelo obtenido, a través de un examen biológico -asegurándonos que el comportamiento descrito está de acuerdo con la conducta biológica y empírica esperada-, así como de un examen estadístico del ajuste no lineal, incluido un análisis gráfico de los residuos. Para comprobar la hipótesis de no correlación de las observaciones, una vez realizada la corrección de los errores explicada, además del examen de los residuos, se emplea el test de DURBIN & WATSON (1951).

- Análisis de sensibilidad de los parámetros: en modelos no lineales estos análisis tratan de poner en evidencia aquellos parámetros cuya fluctuación en determinadas condiciones entrañaría una mayor variación en las previsiones del modelo (HUET *et al.*, 1992). Esos parámetros ‘sensibles’ son los que convendría determinar con mayor precisión. Siguiendo a VANCLAY (1994), la sensibilidad de cada parámetro β , viene

$$S_{\beta} = \frac{\partial y / \hat{y}}{\partial \hat{\beta} / \hat{\beta}} = \frac{\partial y}{\partial \hat{\beta}} \cdot \frac{\hat{\beta}}{\hat{y}}$$

que relaciona los cambios relativos que se producen en la estimación de la variable respuesta \hat{y} , a partir de los cambios relativos que se produzcan en el propio parámetro β (tal que si una variación de β de 10% se tradujera en un 50% en la predicción, la sensibilidad $S_{\beta}=5$).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El ajuste del modelo propuesto por Goelz & Burk con nuestros datos dio lugar a los resultados que aparecen en la tabla 1. En el momento de efectuar la regresión, a los parámetros ρ y γ se les asignaba cero como valores iniciales, pero en el resultado no se han obtenido valores próximos a cero, lo que indica la fuerte autocorrelación de los errores e_{ij} (no de ε_{ij}). Por otra parte, la *figura 1* ilustra la evolución de cuatro curvas de calidad escogidas del haz de curvas altura-edad que representa el modelo ajustado, junto con las series de datos de parcelas utilizadas para su ajuste, y otros datos de parcelas temporales de que se disponía, y que habían sido replanteadas intentando abarcar una distribución completa de edad-densidad-calidad de las masas de la región. Las curvas escogidas corresponden a las que pasan por los puntos (100,9), (100,13), (100,17), y (100,21).

Un primer análisis del comportamiento biológico del modelo, muestra que los valores de las asíntotas de las cuatro curvas escogidas (obtenidas de calcular el límite de la correspondiente expresión, cuando t_i tiende a infinito) son respectivamente 19.3 m, 22.2 m, 24.9 m, y 27.6 m, de la

peor a la mejor calidad, respectivamente. Valores coherentes con los datos que se dispone de los pies más viejos de la zona, que con edades en torno a 200 o 250 años, los más altos no superan los 25m de altura. A los 150 años, límite de validez del modelo que establecemos, puesto que los datos longitudinales no alcanzan más allá de dicho valor, la altura máxima en la mejor calidad establecida ronda los 24m.

Por otra parte, respecto de los puntos de inflexión, no existe ninguno para edades mayores de cero lo que implica que, a lo largo de toda la vida de la masa, el desarrollo en altura dominante siempre es cóncavo, sin ningún período en que los crecimientos en altura vayan aumentando con la edad (cosa que a veces ocurre en los primeros estadios de las masas). A este respecto, se debe tener en cuenta que en este estudio se han considerado edades 'normales', por lo que cuando en la gráfica aparece la edad cero, el árbol ya tiene 1.30m de altura y a veces muchos años, pues ha estado en general sometido a diversos agentes externos que al principio le afectan mucho: sequías, fuertes heladas... y, sobre todo, a un fuerte pastoreo. Por ello es muy posible que para él la etapa de incrementos cada vez mayores de crecimiento ya se haya pasado, o simplemente no haya existido, al haber estado el ganado continuamente recortando los brotes. En definitiva, el hecho de que no aparezca la forma sigmoideal en las curvas no hay que interpretarlo necesariamente como un mal ajuste del modelo en las primeras edades, sino como un posible comportamiento real en estas masas.

Evaluación estadística del modelo obtenido

Una primera parte aparece ya explícita en la tabla 1, donde se puede ver que el ajuste del modelo es bueno (según el criterio de los cuadrados medios residuales: MSE), y que todos los parámetros resultan significativos al 95%, no presentándose demasiada correlación entre ellos. Se exponen también los gráficos de valores predichos por el modelo frente a valores medidos (*figura 2*), así como el gráfico final de residuos frente a valores predichos (*figura 3*). En la *figura 2* los puntos representados siguen una diagonal perfecta, de manera que los valores predichos por el modelo coinciden en general con los centros de masa de las observaciones. Por otro lado (*figura 3*) la dispersión de los residuos no parece aumentar con el valor de la variable independiente estimada, no detectándose por tanto problemas de heterocedasticidad. Respecto de la hipótesis de independencia, que en nuestro caso no era cierto con los datos de partida, se ha analizado con los residuos del modelo definitivo ya ajustado ε_{ij} mediante el test de Durbin-Watson, pero da como resultado que dicho test no es concluyente, si bien a la vista del gráfico de residuos no parecen observarse disposiciones de los puntos que sugieran correlación.

- **Análisis de sensibilidad de los parámetros:** Las ecuaciones resultantes de la sensibilidad para cada parámetro se presentan en la *figura 4*: ésta varía con t_i , pero también con los t_j y h_j escogidos. El análisis de la sensibilidad (S) de todos los parámetros entre $t_i=0$ hasta $t_i=150$ años, y considerando las cuatro curvas ($t_j=100$ años, $h_j=9m$), (100, 13), (100, 17), (100, 21), da como resultado que el comportamiento más sensible lo presenta el parámetro b_2 , aunque nunca sobrepasa el valor de 1,8 (valor al que se aproxima en valores altos de t_i -150 años-, cuando $t_j=100$ años y $h_j=9m$). El valor de S para el resto de parámetros nunca alcanza la unidad en valor absoluto.

La evolución de la sensibilidad de todos los parámetros con t_i por calidades, presenta un comportamiento asintótico análogo: positivo para b_2 y b_4 , y negativo para b_1 y b_3 . En la *figura 5* se expone dicha evolución para una calidad media: 100 años, 13 metros.

El hecho que S sea siempre para casi todos los parámetros menor que la unidad (en valor absoluto), demuestra gran estabilidad a pequeñas variaciones de éstos, propiedad altamente deseable. Incluso b_2 , el parámetro más inestable, posee valores no muy elevados.

- En definitiva, se obtiene un modelo válido biológica y estadísticamente, robusto, que aunque no ha sido validado con datos externos al ajuste de la región de estudio, se comprueba que sus curvas dibujan un comportamiento muy semejante al de otros modelos recientemente publicados de la especie, como el de CALAMA *et al* (2003) desarrollado para toda España, y que también ha sido obtenido del empleo de métodos de ecuaciones diferenciales.

BIBLIOGRAFÍA

ASSMANN, E. 1970. *The principles of Forest Yield Study*. Pergamon Press, Oxford. 506 pp.

- CALAMA, R.; CAÑADAS, M.N.; MONTERO, G. 2003. Inter.-regional variability in site index models for even-aged stands of stone pine (*Pinus pinea* L.) in Spain. *Ann. For. Sci.*, 60: 259-269.
- CAÑADAS, M.N.; GARCÍA GÜEMES, C.; MONTERO, G. 1999. Relación altura-diámetro para *Pinus pinea* en el Sistema Central. *Congreso de Ordenación y Gestión sostenible de los montes*. Santiago, 4-9 de octubre de 1999.
- CARMEAN, W.H. 1972. Site index curves for upland oaks in the Central States. *For. Sci.*, 18: 109-120.
- DURBIN, J.; WATSON, G.S. 1971. Testing for serial correlation in least squares regression III. *Biometrika*, 58: 1-19.
- GOELZ, J.C.G.; BURK, T.E. 1992. Development of a well-behaved site index equation: jack pine in north central Ontario. *Can. J. For. Res.*, 22: 776-784.
- HUET, S.; JOLIVET, E.; MESSEAN, A. 1992. *La régression non-linéaire. Méthodes et applications en biologie*. INRA Editions. Paris. 236 + index.
- JOHANSSON, T. 1996. Site index curves for european aspen (*Populus tremula* L.) growing on forest land of different soils in Sweden. *Silva Fennica*, 30 (4): 437-458.
- MONSERUD, R.A. 1984. Height-growth and site-index curves for Inland Douglas-fir based on stem analysis data and forest habitat type. *For. Science*, Vol.30, N° 4: 943-965.
- VANCLAY, J.K. 1994. *Modelling forest growth and yield. Applications to mixed tropical forests*. CAB International. Wallingford. 312 pp.
- ZEIDE, B. 1993. Analysis of Growth Equations. *For. Science*, Vol.39, N°3: 594-616.

TABLA 1. Resultados del ajuste del modelo de Goelz & Burk (1992), mediante regresión no lineal. Realizado con procedimiento DUD (don't use derivatives).

Regresión mediante Mínimos Cuadrados Ordinarios no Lineales				Variable dependiente: H_0		
Fuente	DF	Suma de Cuadrados	Cuadrados medios			
Regresión	6	627.53313649	104.58885608			
Residual	624	0.86338910	0.00138364			
Total	630	628.39652560				
Parámetro	Estimación	Error estándar Asintótico	Intervalo de Confianza (al 95%)			
			Inferior	Superior		
b_1	0.252147664	0.02701717599	0.19909121202	0.3052041160		
b_2	1.225418697	0.13706634912	0.95624718311	1.4945902116		
b_3	0.498226472	0.07162622843	0.35756656173	0.6388863822		
b_4	0.785418166	0.00762017006	0.77045364170	0.8003826903		
ρ	0.379372420	0.02341684637	0.33338631183	0.4253585287		
γ	0.549946882	0.03187184986	0.48735679964	0.6125369645		
Matriz de Correlación Asintótica						
Corr	b_1	b_2	b_3	b_4	ρ	γ
b_1	1	0.88249032	0.77917384	0.15849842	0.08961225	-0.07973944
b_2	0.88249032	1	0.97398134	-0.29050942	0.03329592	-0.07287758
b_3	0.77917384	0.97398134	1	-0.40319575	0.00017058	-0.04669461
b_4	0.15849842	-0.29050942	-0.40319575	1	-0.03967884	0.11161594
ρ	0.08961225	0.03329592	0.00017058	-0.03967884	1	-0.40279016
γ	-0.07973944	-0.07287758	-0.04669461	0.11161594	-0.40279016	1

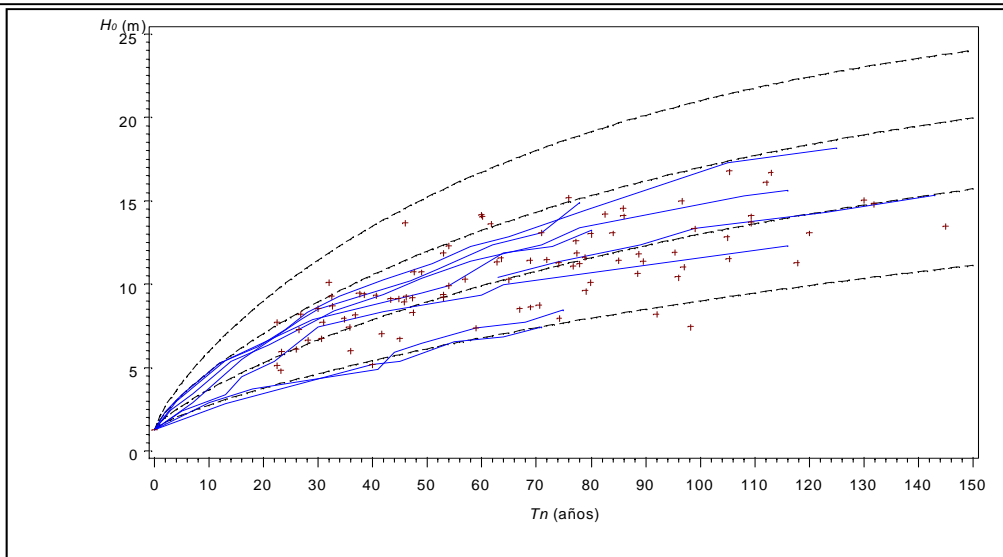


Figura 1. Curvas de calidad que pasan por los puntos (100,9), (100,13), (100,17), y (100,21), escogidas del haz de curvas de calidad obtenido, junto con las series de datos de parcelas utilizadas para su ajuste, y otros datos de parcelas temporales.

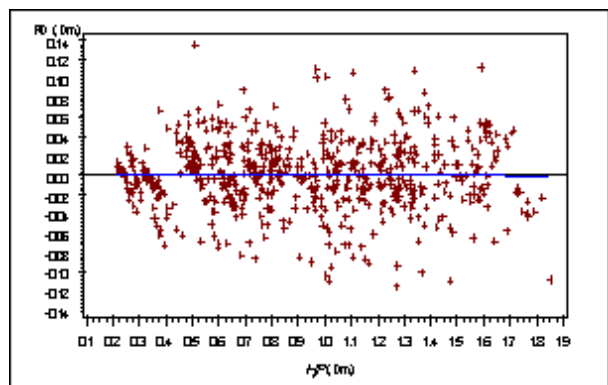
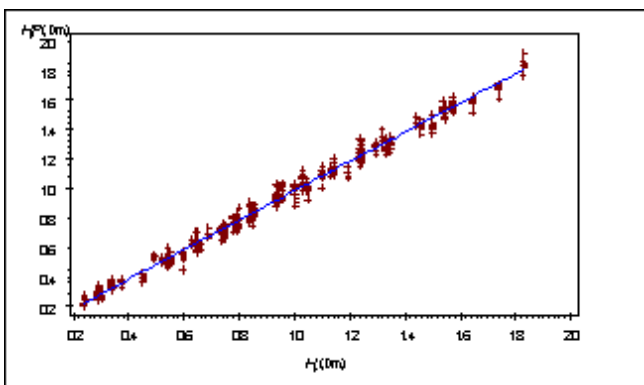


Figura 2. Alturas medidas (H_0), frente a alturas predichas (H_0P) por el modelo resultante según Goelz y Burk.

Figura 3. Gráfico de residuos ($RD=e_{ij}$) frente a valores predichos, del modelo según Goelz y Burk

a) b_1

$$S_{i,1} = \frac{b_1 (H_j - .13) \left(\frac{1-E_2}{1-E_1} \right)^{b_4} b_4 \left(\frac{\left(\frac{H_j}{t_j} \right)^{b_2} b_3}{1-E_1} - \frac{(1-E_2) \left(\frac{H_j}{t_j} \right)^{b_2} b_3}{(1-E_1)^2} \right) (1-E_1)}{(1-E_2) \left(.13 + (H_j - .13) \left(\frac{1-E_2}{1-E_1} \right)^{b_4} \right)}$$

b) b_2

$$S_{i,2} = \frac{b_2 (H_j - .13) \left(\frac{1-E_2}{1-E_1} \right)^{b_4} b_4 \left(b_1 \frac{\left(\frac{H_j}{t_j} \right)^{b_2} \ln \left(\frac{H_j}{t_j} \right) b_3}{1-E_1} - \frac{(1-E_2) b_1 \left(\frac{H_j}{t_j} \right)^{b_2} \ln \left(\frac{H_j}{t_j} \right) b_3}{(1-E_1)^2} \right) (1-E_1)}{(1-E_2) \left(.13 + (H_j - .13) \left(\frac{1-E_2}{1-E_1} \right)^{b_4} \right)}$$

c) b_3

$$S_{i,3} = \frac{b_3 (H_j - .13) \left(\frac{1-E_2}{1-E_1} \right)^{b_4} b_4 \left(b_1 \frac{\left(\frac{H_j}{t_j} \right)^{b_2} b_3 \ln(t_j) t_i}{1-E_1} - \frac{(1-E_2) b_1 \left(\frac{H_j}{t_j} \right)^{b_2} b_3 \ln(t_j) t_i}{(1-E_1)^2} \right) (1-E_1)}{(1-E_2) \left(.13 + (H_j - .13) \left(\frac{1-E_2}{1-E_1} \right)^{b_4} \right)}$$

d) b_4

$$S_{i,4} = \frac{b_4 (H_j - .13) E_3 \ln(E_3)}{.13 + (H_j - .13) E_3}$$

donde se han definido:

$$E_1 = e^{-b_1 \left(\frac{H_j}{t_j} \right)^{b_2} b_3 t_j} \quad E_2 = e^{-b_1 \left(\frac{H_j}{t_j} \right)^{b_2} b_3 t_i} \quad E_3 = \frac{1 - e^{-b_1 \left(\frac{H_j}{t_j} \right)^{b_2} b_3 t_i}}{1 - e^{-b_1 \left(\frac{H_j}{t_j} \right)^{b_2} b_3 t_j}}$$

Figura 4. Expresiones de las sensibilidades en función de los parámetros de ajuste.

Figura 5. Evolución de la sensibilidad (S) con la edad dominante (Tn) en la calidad (100años, 13m). Cada

parámetro viene representado por un color: b_1 azul; b_2 rojo; b_3 marrón; y b_4 negro.