CARACTERIZACIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS DE LAS MASAS DE *Quercus robur* L. EN LUGO (GALICIA) MEDIANTE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD BETA

M.F. ÁLVAREZ, C.A. LÓPEZ.
mariaflor.alvarez@rai.usc.es, calopez@lugo.usc.es.

Dep. de Enxeñería Agroforestal. Escola Politécnica Superior de Lugo. Campus universitario s/n. 27002, Lugo. Universidade de Santiago de Compostela.

RESUMEN

Se ha ajustado la función de densidad Beta a un total de 116 distribuciones diamétricas de *Quercus robur* L. en la provincia de Lugo (Galicia). Los parámetros de esta función se han obtenido según el método de regresión lineal, regresión no lineal y la metodología propuesta por Maltamo, para distribuciones con clases diamétricas de amplitud 1 cm y 2 cm. El comportamiento de cada uno de los métodos se ha comparado mediante el test de Kolmogorov-Smirnov, el error medio cuadrático (EMC), el error medio aritmético (EMA) y el sesgo, para determinar cuál se adapta mejor a la forma de las distribuciones diamétricas de la especie.

P.C.: distribución diamétrica, Beta, *Pinus radiata*,Lugo.

SUMMARY

Beta density function has been fitted to 116 diameter distributions of *Quercus robur* L. in Lugo (Galicia). The parameters of this function have been estimated by linear regression, non-linear regression and following Maltamo´s method, for distributions with 1 cm and 2 cm classes. The goodness-fit of each method has been tested by Kolmogorov-Smirnov test, square mean error (SME), arithmetic mean error (AME) and bias.

K.W.: diameter distributions, Beta, *Pinus radiata*,Lugo.

INTRODUCCIÓN

El diámetro del árbol determina, en gran medida, la finalidad a la que se destinará su madera y, por tanto, el precio que de ella se pueda obtener. Las excelentes correlaciones existentes entre el diámetro y otras variables características de la masa forestal, como por ejemplo el volumen, permiten emplear el conocimiento de la distribución diamétrica para establecer relaciones con la calidad de estación, la composición, edad o densidad de la masa. Estas relaciones pueden tener gran importancia tanto desde el punto de vista económico (producción) como desde el enfoque biológico.

La posibilidad de obtener la distribución diametral de una masa, en la actualidad o en un futuro, a partir de una variable sencilla de medir en campo o estimable a partir de una tabla de producción, permite comparar diferentes tratamientos selvícolas para escoger la mejor alternativa en función de los objetivos fijados a priori y, en general, un conocimiento más profundo de la estructura y del equilibrio existente en la masa.

En este trabajo se analiza el empleo de la función de densidad Beta como modelo de distribuciones diamétricas, discutiendo sus ventajas e inconvenientes, para clases diamétricas de 1 cm y 2 cm.

MATERIAL Y MÉTODOS

Los datos empleados provienen de 116 parcelas no permanentes circulares de 10 metros de radio, instaladas en masas de toda la provincia de Lugo. La Tabla 1 muestra los valores medio, máximo y mínimo de las principales variables de masa del dispositivo de parcelas utilizado.

Tabla 1. Principales parámetros de masa de las parcelas utilizadas.

	Edad (años)	**Densidad (pies/ha)**	**DMC (cm)**	**Área Basimét. (m^2/ha)**	**H_0 (m)**	**VCC (m^3/ha)**	**FCC (%)**
Media	50	628	22,4	26,8147	16,22	134,47	72,8
Máximo	108	1953	48,0	60,5538	23,78	280,79	95,0
Mínimo	30	233	9,4	3,2451	8,99	11,75	50,0

Se han establecido clases diamétricas de 1 y 2 cm, puesto que son valores que permiten tener un mínimo de diez clases en cada distribución para poder realizar un ajuste estadísticamente correcto, no

provocan una dispersión excesiva de los datos que redunde negativamente en la bondad de dicho ajuste y posibilitan evaluar cual de los dos tamaños resulta más adecuado para la caracterización de las distribuciones diamétricas de *Quercus robur.*

Para el análisis de las distribuciones diamétricas se ha empleado la función de densidad Beta, utilizada por primera vez en el ámbito forestal por Clutter y Bennet en 1965 y a partir de entonces ha sido muy usada para ajustar distribuciones diamétricas (VÄLIAHO & VUOKILA 1973; ELFVING, 1974; BURKHART & STRUB, 1974; MALTAMO *et al.*, 1995). Esta función de densidad es bastante flexible pudiéndose emplear para modelizar distribuciones diamétricas tanto de masas regulares como irregulares.

La forma general de esta función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = a_1 (x - \alpha)^{a_2} (\beta - x)^{a_3} \qquad [1]$$

siendo "*f(x)*" el valor de la frecuencia relativa que corresponde a un valor "*x*" de la variable aleatoria; "α " y "β" son dos constantes relacionadas con los valores mínimo y máximo de la variable "*x*" y "a_1", "a_2" y "a_3" son parámetros a determinar en el ajuste.

Aunque originariamente el modelo contempla la utilización del parámetro "α" como valor mínimo de la variable "*x*", en el desarrollo de la función para el presente trabajo se ha considerado el valor de dicha variable como cero; lo cual evitará la obtención de una ecuación que relacione el diámetro mínimo de la distribución futura con el diámetro mínimo cuadrático, considerando que dicho valor no influirá de forma significativa en el resultado final del ajuste de la ecuación. Por otra parte, se ha considerado el parámetro "β" como el extremo superior de la clase diamétrica mayor, siguiendo la metodología descrita por ZÖHRER (1970).

La expresión resultante empleada para realizar el ajuste de las 116 distribuciones diamétricas es la siguiente:

$$y = N a_1 (x)^{a_2} (\beta - x)^{a_3} \qquad [2]$$

donde "*y*" es el número de árboles existentes en la clase diamétrica cuyo centro es "*x*", "*N*" es la densidad de la masa en pies/ha, "β" es una constante cuyo valor depende del extremo superior de la clase diamétrica máxima y "a_1", "a_2", "a_3" los parámetros de la función.

Para la determinación de los parámetros que caracterizan la función de densidad Beta se han utilizado las siguientes tres metodologías:

- ✓ Regresión Lineal:

A pesar de que la ecuación [2] no es directamente lineal en los parámetros "a_2" y "a_3", se puede linealizar tomando logaritmos en ambos términos, de forma que la expresión definitiva es la siguiente:

$$\log y = \log N + \log a_1 + a_2 \log(x) + a_3 \log(\beta - x) \qquad [3]$$

El empleo de esta metodología para clases diamétricas de 1 cm se ha denominado método "BL1" y para clases de 2 cm "BL2".

- ✓ Regresión No Lineal:

Para inicializar los parámetros "a_1", "a_2" y "a_3" correspondientes a la ecuación [2], se han utilizado los valores que toman "a_1", "a_2" y "a_3" en el método de regresión lineal. El método iterativo empleado se corresponde con el de Gauss-Newton.

Para clases diamétricas de 1 cm este método se ha identificado como "BGN1" y para clases de 2 cm, "BGN2".

- ✓ Procedimiento descrito por LOETSCH *et al*. (1973) con las modificaciones propuestas por MALTAMO *et al.* (1995):

Los parámetros "a_2" y "a_3" se calcularon a partir de los valores del diámetro medio "$\bar{d}$" y la desviación típica "σ":

$$a_3 = \frac{\dfrac{Z}{\sigma^2_{rel}(Z+1)^2} - 1}{Z+1} - 1 \qquad a_2 = Z(a_3 + 1) - 1 \qquad [4]$$

donde:

$$Z = \frac{x_{rel}}{1 - x_{rel}} \; ; \; x_{rel} = \frac{\bar{d} - \alpha}{\beta - \alpha} \; ; \; \sigma^2_{rel} = \frac{\sigma^2}{(\beta - \alpha)^2} \qquad [5]$$

Una vez determinados los valores de "a_2" y "a_3" el parámetro "a_1" es un factor de escala que viene definido por la siguiente relación:

$$a_1 = \frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^{a_2} (\beta - x)^{a_3}} \qquad [6]$$

El método de estimación de "a_1", "a_2" y "a_3" según este procedimiento se ha denominado "BM1" para el intervalo de clase diamétrica de 1 cm y "BM2" para el de 2 cm.

Para comprobar la bondad del ajuste se ha empleado el test de Kolmogorov-Smirnov (SOKAL & ROHLF, 1981). Tanto para determinar la mejor ecuación de ajuste de las distribuciones, como para establecer el mejor modelo en función de las variables de masa, se han empleado criterios basados en los residuos: el sesgo, el error medio cuadrático (EMC) y el error medio aritmético en valor absoluto (EMA). Se ha calculado su valor promedio para el total de datos y el valor medio por clase diamétrica para cada uno de los métodos.

$$SESGO = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - \hat{X}_i}{N} \; ; \; EMC = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \hat{X}_i)^2}{N} \; ; \; EMA = \frac{\sum_{i=1}^{N} |X_i - \hat{X}_i|}{N} \qquad [7]$$

donde X_i es el valor real (observado), $\hat{X}_i$ el valor predicho por el modelo y N el número de datos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Caracterización de las distribuciones diamétricas de *Quercus robur*

La Tabla 2 muestra los valores medios, máximos, mínimos y la desviación típica de los parámetros "a_1", "a_2", "a_3" estimados según los métodos empleados. La nomenclatura correspondiente a las distintas metodologías analizadas se ha descrito en material y métodos.

Tabla 2. Caracterización de los parámetros "a_1", "a_2" y "a_3" para intervalos de clase diamétrica de 1 y 2 cm.

Intervalo de Clase	Método	Parámetros	Promedio	Desviación típica	Máximo	Mínimo
1 cm	BL1	*a1*	4,598414	38,3426	405,7065	1,37 E-05
		a2	0,163637	0,7984	2,2607	-2,3883
		a3	0,282784	0,2823	1,1181	-0,47326
	BGN1	*a1*	4,594552	34,5297	342,5076	3,11 E-42
		a2	1,437269	1,8419	7,2515	-2,6938
		a3	1,725203	2,7245	19,8221	-0,4109
	BM1	*a1*	8,80 E -05 -05	0,00048	0,0047	1,38 E-18
		a2	2,625007	1,3755	7,2345	-0,1854
		a3	2,113295	1,3490	8,2154	0,2535
2 cm	BL2	*a1*	21,429989	227,3741	249,1590	3,50 E-08
		a2	0,520725	1,0926	3,7792	-3,3001
		a3	0,583531	0,4585	1,9161	-0,8226
	BGN2	*a1*	0,218345	1,3027	12,7387	1,90 E-19
		a2	2,227910	2,1246	8,3358	-1,8235
		a3	2,376052	2,1015	8,7674	-0,1710
	BM2	*a1*	7,246 E-05	0,0004	0,0047	3,31 E-19
		a2	2,708875	1,4213	7,7069	-0,1854
		a3	2,266105	1,3775	8,5199	0,2535

Se deben destacar las diferencias existentes en general entre los valores medios obtenidos a partir de la regresión lineal y no lineal, pese a que los primeros se emplean como inicializadores de los segundos. Los valores obtenidos según el método de MALTAMO *et al*. (1995) también difieren bastante de los obtenidos por regresión.

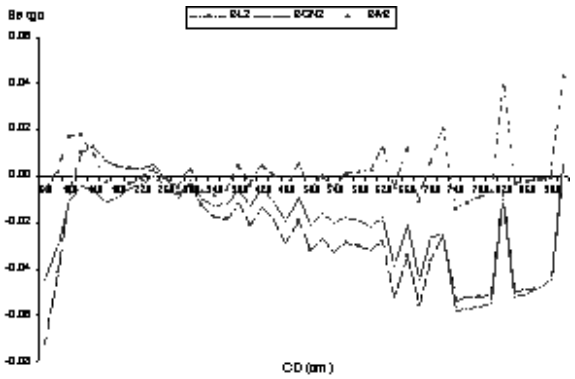
En la Tabla 3 se exponen los valores promedio del sesgo, error medio absoluto (EMA), error medio cuadrático (EMC) y el número de parcelas excluidas por el test de Kolmogorov-Smirnov para cada una de los tres metodologías.

Tabla 3. Valores promedio de Sesgo, EMA (error medio absoluto), EMC (error medio cuadrático), y N_{EXCL} (número de parcelas excluidas por el test de Kolmogorov-Smirnov para un nivel de significación de 20%) para intervalos de clase diamétrica de 1 y 2 cm.

Intervalo de Clase	Método	Sesgo	EMA	EMC	Nº excl.
1 cm	BL1	-0,030131	0,036490	0,003345	102
	BGN1	-0,030525	0,037080	0,003653	116
	BM1	0,019333	0,014631	0,000492	25
2 cm	BL2	-0,024248	0,038071	0,002364	81
	BGN2	-0,021634	0,034825	0,001979	43
	BM2	0,001980	0,022101	0,000975	20

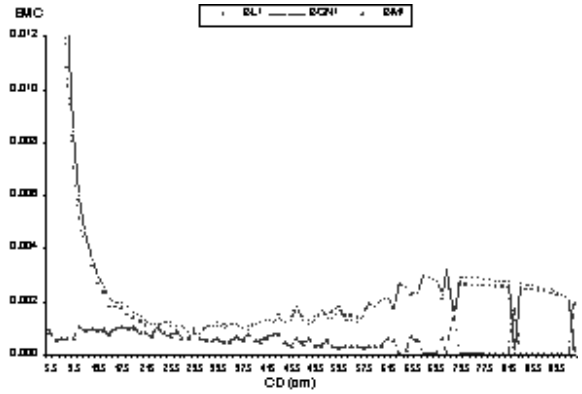
Los valores de sesgo, EMC y EMA obtenidos empleando el método de MALTAMO *et al.* (1995) son claramente superiores a los obtenidos por regresión, lo que contrasta con los resultados obtenidos por ALVAREZ GONZÁLEZ (1997) para *Pinus pinaster* Ait. y LÓPEZ SÁNCHEZ (2000) para *Pinus radiata* D. Don en Galicia. Los resultados obtenidos muestran el mal comportamiento de los ajustes realizados por regresión lineal y no lineal, especialmente si se hace referencia al número de parcelas excluidas por el test de Kolmogorov-Smirnov. Los estadísticos indican una mejoría en el ajuste al emplear el método de MALTAMO *et al.* (1995) para una amplitud de clase diamétrica de 1 cm; que contrasta con los resultados obtenidos por regresión, en los que se obtiene un mejor ajuste para un intervalo de clase diamétrica de 2 cm.

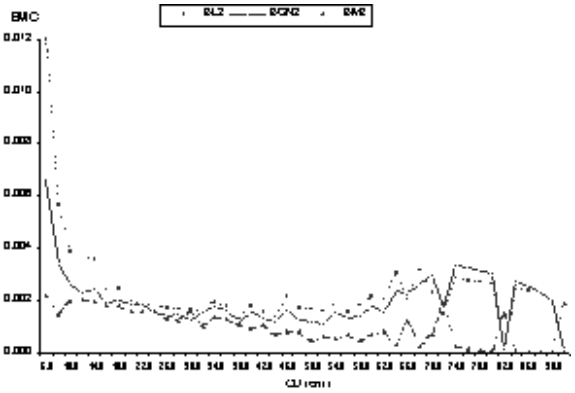
En las Figuras 1, 2, 3 y 4 se representa la distribución general del sesgo y del EMC por clases diamétricas con intervalos de 1 y 2 cm, para las tres metodologías propuestas para el ajuste de la función de densidad Beta.



Figuras 1 y 2. Sesgo para los métodos BL_i,BGN_i,BM_i , para intervalos de clase diamétrica ($_i$) de 1 y 2 cm.Nota: CD (cm) es la marca de clase diamétrica.

En las figuras anteriores se observa que la distribución del sesgo para los métodos de regresión lineal y no lineal son similares, con una tendencia a la sobrestimación de las frecuencias, especialmente acusada para clases diamétricas de 1 cm. El método de MALTAMO *et al.* (1995) presenta unos valores de sesgo menores, sin que existan diferencias significativas en su distribución por clases diamétricas en función del tamaño de estas.





Figuras 3 y 4. EMC para los métodos BL_i,BGN_i,BM_i , para intervalos de clase diamétrica ($_i$) de 1 y 2 cm.Nota: CD (cm) es la marca de clase diamétrica.

Las anteriores figuras muestran unos valores de EMC significativamente menores en el caso de realizar el ajuste según el método de MALTAMO *et al.* (1995) y emplear clases diamétricas de 1 cm. Los mayores errores se cometen en las zonas extremas de la distribución, especialmente a partir de la clase diamétrica de 72,5 cm, lo que probablemente se debe a que existe un menor volumen de datos en estas clases diamétricas. Los resultados obtenidos con los métodos de regresión no difieren mucho entre sí, y no resulta determinante la amplitud de clase diamétrica.

CONCLUSIONES

El ajuste de la función de densidad Beta según el método de LOETSCH *et al.* (1973), modificado por MALTAMO *et al*. (1995), para clases diamétricas de 1 cm, resulta ser la metodología más adecuada para la caracterización de las distribuciones de *Quercus robur* en la provincia de Lugo, de acuerdo con los valores de sesgo, EMC, EMA y el test de Kolmogorov-Smirnov y en comparación con los métodos de regresión lineal y no lineal.

Existen diferencias significativas en el caso de que se empleen clases diamétricas de 1 cm o de 2cm; en el caso de la regresión lineal y no lineal resulta más adecuado emplear clases diamétricas de 2 cm, y en el caso del método LOETSCH *et al.* (1973) modificado por MALTAMO *et al.* (1995) los resultados son más favorables si las clases son de 1 cm.

El siguiente paso consistiría en obtener unas ecuaciones que relacionasen los parámetros de la función con las variables de masa más frecuentes, de manera que se puedan estimar dichos parámetros y, de este modo, representar la distribución diamétrica a cualquier edad de un rodal, siempre que los valores de las variables de masa a esa edad sean conocidos.

La referencia más reciente corresponde al trabajo desarrollado por PUUMALAINEN (1996).

AGRADECIMIENTOS

Nuestro especial agradecimiento a Marcos Barrio Anta, Miguel Balboa Murias, Fernando Solla Gullón, Goreti Manin Castro y Eva Docando Veiga.

De la misma forma, el agradecimiento a Juan Gabriel Álvarez González Roque Rodríguez Soalleiro y Alberto Rojo y Alboreca, investigadores de la Escola Politécnica Superior de Lugo por sus sugerencias y correcciones.

Este trabajo ha sido financiado por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) y la Comisión Europea, a través del proyecto 1FD97-0585-C03-03.

BIBLIOGRAFÍA

ÁLVAREZ GONZÁLEZ, J. G. (1997). *Análisis y caracterización de las distribuciones diamétricas de Pinus pinaster Ait. en Galicia*. Tesis doctoral. E.T.S.I. Montes. U.P.M. 240 p. (inédito).

BURKHART, H.E.& STRUB, M.R. (1974). *A model for simulation of planted loblolly pine stands. "Growth Models for tree and stand simulation"*. Proceedings of IUFRO meeting. Jöran Fries. Stockholm, p. 128-135.

ELFVING, B. (1974). *A model for the description of the structure in unthinned stands of Scots Pine.* "Growth models for tree and stand simulation". Proceedings of IUFRO meeting. Jöran Fries. Stockholm, p 161-179.

LOETSCH, F.; ZÖHER, F.; HALLER, K.E. (1973). *Forest inventory 2.* Verlagsgesellschaft. BLV. Munich. 469 p.

LÓPEZ SÁNCHEZ, C. A. (2000). *Caracterización de las distribuciones diamétricas de Pinus radiata D. Don. en Galicia*. Proyecto Fin de Carrera. E.P.S. Lugo. USC. 191 p . (inédito).

MALTAMO, M.; PUUMALAINEN, J.; PÄIVINEN, R. (1995). *Comparison of Beta and Weibull functions for modelling basal area diameter distribution in stands of Pinus sylvestris and Picea abies.* Scandinavian Journal of Forest Research,10: 284-295.

PUUMALAINEN (1996). *Die Beta-Funktion und ihre analystische Parameterbestimmung für die Darstellung von Durchmesserverteilungen*. Georg-August-Universität Göttingen. Arbeitspapier 15-96.

SOKAL, R.R.& ROHLF, F.J. (1981). *Biometry*. W.H. Freeman and Company. 2ª edición. New York. 859 p.

VÄLIAHO, H.& VUOKILA, Y. (1973). *A system for simulation of the development of stem-diameter distributions.* Communicationes instituti forestalis Fenniae 78. 9. Helsinki 28 p.