TARIFA DE CUBICACIÓN CON CLASIFICACIÓN DE PRODUCTOS PARA *Quercus robur* L. EN EL NORTE DE LA PROVINCIA DE LUGO.

G. MANIN CASTRO; M. BARRIO ANTA; I.J. DÍAZ-MAROTO

Depto. de Enxeñería Agroforestal. Escola Politécnica Superior, Universidad de Santiago de Compostela. Campus Universitario s/n., 27002 Lugo.
E-mail: anaruiz@lugo.usc.es

RESUMEN

Se han comparado tres funciones de perfil compatibles con una tarifa de cubicación clásica escogiéndose tras su comparación como mejor, el modelo de MAX Y BURKHART (1976). En la tarifa de cubicación de dos entradas compatible se sustituye la relación de compatibilidad de la función de perfil para obtener así una tarifa que se entiende mejor que una ajustada por procedimientos clásicos. Posteriormente integrando la función de perfil se ha obtenido una tarifa con clasificación de productos para roble en el norte de Lugo.

P.C.: *Quercus robur*, Norte de Lugo, tarifa de cubicación, función de perfil.

SUMMARY

Three compatible taper functions were fitted and comparisons were made in order to determine which equation system provide the best overall fit. The results indicate that a MAX y BURKHART (1976) model, based on a segmented taper equation, showed the best adjustment. In the classic SCHUMACHER & HALL (1933) volume equation the constant are replaced by a compatibility relationship in the taper function. The integrated teper function provides a equation to predict a total individual tree volume and merchantable volume to any merchantability limit (expressed in terms of diameter or heigh) for *Quercus robur* in Nothern Lugo province.

K.W.: *Quercus robur*, North of Lugo, merchantable volume equation, taper equation

INTRODUCCIÓN

La determinación del volumen comercial en pie es uno de los problemas más importantes a resolver por la dendrometría, la búsqueda de modelos que predigan este volumen es una herramienta necesaria para gestores de las masa forestales. El volumen total de un árbol puede ser estimado con una considerable exactitud mediante el empleo de tarifas o tablas de cubicación clásicas, no obstante esto no nos indica nada sobre las dimensiones de los productos a obtener; actualmente se desarrollan nuevos métodos para la determinación del volumen hasta una determinado diámetro del tronco o una determinada altura como son las funciones de volumen porcentual o volumen de razón y las funciones de perfil del tronco (TRINCADO *et al*, 1997).

Las funciones de perfil son relaciones matemáticas entre los diámetros o secciones del tronco en cualquier punto del mismo y la altura a la que se encuentran (CASTEDO & ÁLVAREZ GONZÁLEZ, 2000).

En este artículo se examinan tres funciones de perfil compatibles con una tarifa de cubicación. Los modelos compatibles fueron introducidos por DEMAERSCHALK (1972, 1973); la compatibilidad se refiere a que al ser integradas las funciones de perfil estas entregan el mismo volumen que una tarifa de cubicación previamente ajustada a los datos (PRODAN *et al*., 1997). construyendo así la tarifa de cubicación con clasificación de productos con el mejor modelo de los tres analizados.

MATERIAL Y MÉTODOS

Los datos para este trabajo proceden de una muestra de 92 árboles extraídos en masas regulares o semirregulares de *Quercus robur* en el norte de la provincia de Lugo.

En cada árbol se midió el diámetro normal, y posteriormente se troceo el fuste en trozas de un metro de longitud en las cuales se midió el diámetro basal en cruz y el espesor de corteza. En la tabla 1 se muestran los estadísticos descriptivos del diámetro normal (D) y la altura total (H) de los árboles empleados.

Tabla 1.- Estadísticos descriptivos para los 92 árboles de la muestra.

Estadístico	D (cm)	H (m)

Mínimo	13,65	9,30
Máximo	48,70	26,10
Media	30,24	14,41
Varianza	41,25	11,32
Desviación estándar	6,42	3,36
Coef. de variación (%)	21,23	20,49

Se han empleado tres modelos de funciones de perfil compatibles con tarifas de cubicación de dos entradas. Los modelos empleados son los siguientes:

Función de Kozak (1969)

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = b_1 \cdot (X-1) + b_2 \cdot (X^2-1) \qquad [1]$$

Función de Demaerschalk (1972)

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = b_1 \cdot D^{b_2} \cdot (H-h)^{b_3} \cdot H^{b_4} \qquad [2]$$

Función de Max y Burkhart (1976)

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = b_1 \cdot \left(\frac{h}{H}-1\right) + b_2 \cdot \left(\frac{h^2}{H^2}-1\right) + b_3 \cdot \left(a_1 - \frac{h}{H}\right) \cdot I_1 + b_4 \cdot \left(a_2 - \frac{h}{H}\right) \cdot I_2 \qquad [3]$$

Donde:

d = diámetro con corteza correspondiente a una altura h (en cm).
D = diámetro normal con corteza (en cm).
h = altura en metros desde la base del árbol hasta el punto donde se alcanza el diámetro d.
H = altura total del árbol (en m).
ai, bi = coeficientes a determinar en el ajuste por regresión.

$T = \frac{h}{H}$

$I_i = 1$ si $a_i \geq \left(\frac{h}{H}\right)$

$I_i = 0$ si $a_i < \left(\frac{h}{H}\right)$ donde i = 1 ó 2

El modelo de KOZAK (1972) se ha ajustado por mínimos cuadrados ordinarios empleando el procedimiento REG del paquete estadístico SAS/STAT TM versión 8.0, (SAS INSTITUTE INC., 1999). Los modelos de DEMAERSCHALK (1972) y MAX & BURKHART (1976) no son modelos lineales, por lo que el ajuste se ha llevado a cabo mediante el procedimiento NLIN del mismo paquete estadístico, empleando el método iterativo de Gauss-Newton, usando como valores de comienzo los obtenidos por otros autores en otros trabajos similares.

La comparación de las estimaciones de los modelos se ha basado en la obtención de estadísticos a partir de los residuos (E_i) usados con frecuencia en la literatura (CAO *et al*, 1980, FIGUEIRIDO-FILHO *et al*, 1996, PRODAN *et al*; 1997, GADOW & HUI, 1999; CASTEDO & ÁLVAREZ GONZÁLEZ, 2000). Para analizar la precisión de las estimaciones se usa el error medio cuadrático (EMC), la desviación estándar de los residuos (S) y la media de los valores absolutos de los residuos ($|\overline{E}|$). Para analizar la desviación del modelo respecto de a los valores observados se usa el sesgo ($\overline{E}$). Al ser modelos que presentan igual variable dependiente se puede emplear también en su comparación el coeficiente de determinación (R^2).

Las fórmulas de los estadísticos empleados son las siguientes:

Error medio cuadrático (EMC): $EMC = \frac{\sum_{i=1}^{N} (E_i)^2}{N-q-1}$

Desviación estándar de los residuos (S): $S=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(E_i-\overline{E}\right)^2}{N-1}}$

Media de los valores absolutos de los residuos ($\left|\overline{E}\right|$): $\left|\overline{E}\right|=\dfrac{\sum_{i=1}^{i=N}\left|E_i\right|}{N}$

Sesgo ($\overline{E}$): $\overline{E}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}E_i}{N}$

Coeficiente de determinación (R^2): $R^2=1-\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}$

Donde:
N = número total de datos usados en el ajuste del modelo
q = número de variables del modelo.

$E_i=y_i-\hat{y}_i$

$y_i, \hat{y}_i, \overline{y}_i$ son, respectivamente, el valor observado, el valor predicho y valor promedio de la variable dependiente $\left(\dfrac{d}{D}\right)^2$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la tabla siguiente se presenta el valor de los parámetros obtenidos en el análisis de regresión para las tres funciones utilizadas en este trabajo.

Tabla 2.- Valores de los parámetros estimados mediante el análisis de regresión.

Modelo	**b_1**	**b_2**	**b_3**	**b_4**	**a_1**	**a_2**
Kozak (1969)	-2,5214	1,2073	-	-	-	-
Demaerschalk (1972)	1,5411	0,9464	0,9618	-1,0026	-	-
Max y Burkhart (1976)	-3,3611	1,6785	53,4409	-1,4788	0,1096	0,6414

El modelo de MAX y BURKHART (1976) es el modelo que mejor comportamiento presenta para los 5 estadísticos empleados (Tabla 3); es un modelo usado con frecuencia y cuyos resultados depende de la especie, así en ocasiones se han encontrado malos ajustes, en cambio otros se casos ha dado buenos resultados (BYRNE & REED, 1986), recientemente se ha probado con buenos resultados en otras especies en Galicia (CASTEDO & ÁLVAREZ GONZÁLEZ 2000). Es un modelo polinómico segmentado que ajusta tres funciones a lo largo del tronco imponiendo la condición de continuidad de la curva y sus dos primeras derivadas en los puntos de contacto, a_1 y a_2.

Tabla 3.- Valores de los estadísticos en el ajuste para el conjunto del tronco.

Modelo	**EMC**	**$\overline{E}$**	**S**	**$\left\|\overline{E}\right\|$**	**R^2**
Kozak (1969)	0,022663	0,002302	0,149843	0,101477	0,873890
Demaerschalk (1972)	0,022050	0,006357	0,148134	0,102486	0,859753
Max y Burkhart (1976)	0,015360	-0,000181	0,050388	0,083613	0,914137

La tarifa de cubicación compatible a partir de la función de MAX y BURKHART (1976) es la tarifa de cubicación de Spurr, cuya expresión es $V=\alpha\cdot D^2\cdot H$ siendo la relación de compatibilidad

$$\alpha=\frac{\Pi}{4}\left[\frac{b_2}{3}+\frac{b_1}{2}-(b_1+b_2)+\frac{b_3}{3}\cdot a_1^3+\frac{b_4}{3}\cdot a_2^3\right]$$, siendo b_i, y a_i, los valores de los parámetros ajustados por regresión para la función de perfil (tabla..). La tarifa compatible sustituyendo el valor de α queda entonces como:

$V=0{,}3573\cdot D^2\cdot H$ Siendo V = volumen en m^3 D = diámetro en cm H = altura en m,

Para la construcción de una tarifa de cubicación con clasificación de productos a partir de ecuaciones de perfil del tronco, precisan que éstas sean integrables y que posean inversa generalizada. El modelo polinómico segmentado de Max y Burkhart además de tener una aceptable capacidad predictiva es integrables y se pueden invertir.

Partiendo de la ecuación de perfil[3],la expresión del volumen total del árbol (V) se obtuvo mediante la integración de la función de perfil entre la base (*h* = 0) y el ápice del mismo (*h* =*H*), quedando finalmente de la siguiente forma:

$$V=\int_0^H\frac{\pi}{4}\cdot d^2(h)\cdot dh=\frac{\pi}{4}\cdot D^2\cdot H\cdot\left[\frac{b_2}{3}+\frac{b_1}{2}-(b_1+b_2)+\frac{b_3}{3}\cdot a_1^3+\frac{b_4}{3}\cdot a_2^3\right]$$

La expresión del volumen hasta una cierta altura (V_h) tiene 3 posibles soluciones, dependiendo de la posición de *h* con respecto a la altura de los puntos de unión de los submodelos ($a_1\cdot H$ y $a_2\cdot H$)

$$V_{h1}=\int_0^h\left[b_1\cdot\left(\frac{h}{H}-1\right)+b_2\cdot\left(\frac{h^2}{H^2}-1\right)+b_3\cdot\left(a_1-\frac{h}{H}\right)^2\cdot I_1+b_4\cdot\left(a_2-\frac{h}{H}\right)^2\cdot I_2\right]\cdot dh$$

$$V_{h2}=\int_0^{a_1\cdot H}\left[b_1\cdot\left(\frac{h}{H}-1\right)+b_2\cdot\left(\frac{h^2}{H^2}-1\right)+b_3\cdot\left(a_1-\frac{h}{H}\right)^2\cdot I_1+b_4\cdot\left(a_2-\frac{h}{H}\right)^2\cdot I_2\right]\cdot dh+$$
$$\int_{a_1\cdot H}^{h}\left[b_1\cdot\left(\frac{h}{H}-1\right)+b_2\cdot\left(\frac{h^2}{H^2}-1\right)+b_4\cdot\left(a_2-\frac{h}{H}\right)^2\cdot I_2\right]\cdot dh$$

$$V_{h3}=\int_0^{a_1\cdot H}\left[b_1\cdot\left(\frac{h}{H}-1\right)+b_2\cdot\left(\frac{h^2}{H^2}-1\right)+b_3\cdot\left(a_1-\frac{h}{H}\right)^2\cdot I_1+b_4\cdot\left(a_2-\frac{h}{H}\right)^2\cdot I_2\right]\cdot dh+\int_{a_1\cdot H}^{a_2\cdot H}\left[b_1\cdot\left(\frac{h}{H}-1\right)+b_2\cdot\left(\frac{h^2}{H^2}-1\right)+b_4\cdot\left(a_2-\frac{h}{H}\right)^2\cdot I_2\right]\cdot dh+$$
$$\int_{a_2\cdot h}^{h}\left[b_1\cdot\left(\frac{h}{H}-1\right)+b_2\cdot\left(\frac{h^2}{H^2}-1\right)\right]\cdot dh$$

Las 3 soluciones de estas integrales se pueden expresar finalmente, después de realizar simplificaciones, de la siguiente forma genérica:

$$V_h=\frac{\pi}{4}\cdot D^2\cdot H\cdot\left[\frac{b_2}{3}\cdot\left(\frac{h}{H}\right)^3+\frac{b_1}{2}\cdot\left(\frac{h}{H}\right)^2-(b_1+b_2)\cdot\left(\frac{h}{H}\right)-\frac{b_3}{3}\cdot\left[\left(a_1-\frac{h}{H}\right)^3\cdot I_1-a_1^3\right]-\frac{b_4}{3}\cdot\left[\left(a_2-\frac{h}{H}\right)^3\cdot I_2-a_2^3\right]\right]$$

donde:

$I_i = 1$ si $a_i \geq (h/H)$

$I_i = 0$ si $a_i < (h/H)$ $i = 1,2$

Al ser más interesante, en la práctica, conocer el volumen hasta un cierto diámetro límite *d*, debido a que es este el que condiciona en gran medida el destino de la madera que se obtenga de una masa, se hizo necesario determinar una función en la *h* viniese expresada en términos de *d*, *H* y *D*. Esta función es la siguiente:

$$h=\frac{H}{2A}\cdot\left[-B-\sqrt{B^2-4\cdot A\cdot C}\right]$$

donde:

$$A=b_2+b_3\cdot J_1+b_4\cdot J_2$$

$$B=b_1-2\cdot a_1\cdot b_3\cdot J_1-2\cdot a_2\cdot b_4\cdot J_2$$

$$C = -(b_1+b_2)+b_3 \cdot a_1^2 \cdot J_1 + b_4 \cdot a_2^2 \cdot J_2 - \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

donde, a su vez:

$J_i = 1$ si $d \geq D_i$
$J_i = 0$ si $d < D_i$ $\qquad i = 1,2$

Di es el diámetro estimado a la altura de los puntos de unión de los submodelos ($a_i \cdot H$) y tiene la expresión siguiente:

$$D_i = D \cdot \sqrt{b_1 \cdot (a_i - 1) + b_2 \cdot (a_i^2 - 1) + b_4 \cdot (a_2 - a_i)^2} \qquad i = 1,2$$

Todas estas expresiones coinciden con las obtenidas en estudios similares por otros autores al analizar el mismo modelo (MARTIN, 1981; REED y GREEN, 1985).

Por tanto, la tarifa de cubicación con clasificación de productos para *Quercus robur* L. en el norte de la provincia de Lugo, construida a partir de la función de perfil de Max y Burkhart, se expresa como el conjunto de dos ecuaciones: una que permite estimar el volumen hasta una cierta altura (V_h) y otra que estima la altura "h" para un cierto diámetro "d" que nosotros fijemos:

$$V_h = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot H \cdot \left[0{,}5595\left(\frac{h}{H}\right)^3 - 1{,}6805\left(\frac{h}{H}\right)^2 + 1{,}6826\left(\frac{h}{H}\right) + 17{,}8136\left[\left(0{,}1096 - \frac{h}{H}\right)^3 \cdot I_1 - (0{,}1096)^3\right] + 0{,}4929\left[\left(0{,}6414 - \frac{h}{H}\right)^3 \cdot I_2 - (0{,}6414)^3\right]\right]$$

$$h = \frac{H}{2A} \cdot \left[-B - \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}\right]$$

donde:

$$A = 1{,}41 + 144{,}29 \cdot J_1 - 0{,}91 \cdot J_2$$

$$B = -3{,}04 - 17{,}58 \cdot J_1 + 1{,}49 \cdot J_2$$

$$C = 1{,}63 + 0{,}53 \cdot J_1 + 0{,}61 \cdot J_2 - \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

donde, a su vez:

$J_i = 1$ si $d \geq D_i$
$J_i = 0$ si $d < D_i$ $\qquad i = 1,2$

$$D_i = D \cdot \sqrt{-3{,}3611 \cdot (a_i - 1) + 1{,}6785 \cdot (a_i^2 - 1) - 1{,}4788 \cdot (0{,}6414 - a_i)^2} \qquad i = 1,2$$

Basándonos en estas dos expresiones de la tarifa con clasificación de productos se pueden realizar dos tipos de tablas:

1. Una que nos de la altura del tronco, medida desde la base, a la cual aparecen unos diámetros con corteza en punta delgada de 10 cm o cualquier otro que deseemos
2. Otra que nos de los volúmenes del tronco desde la base hasta ese diámetro en punta delgada con corteza de 10 cm, o cualquier otro que deseemos en forma de tabla de doble entrada (*H*, *D*).

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer la inestimable ayuda del Investigador de la Escuela Politécnica Superior de Lugo, Fernando Castedo Dorado.

BIBLIOGRAFÍA

BYRNE, J.C.; REED, D.D.; (1986). *Complex compatible taper and volume estimation systems for red and loblolly pine*. For. Sci.32(2): 423-443.

CASTEDO DORADO, F., ÁLVAREZ GONZÁLEZ, J.G.; (2000). *Construcción de una tarifa de* *cubicación con clasificación de productos para Pinus radiata D. Don en Galicia basada en una función de perfil del tronco*. Invest. Agra.: Sist. Recur. For. Vol 9 (2): 253-268. Madrid.

CAO, Q.; BURKHART, H.; MAX, T.; (1980) *Evaluations of two methods for cubic-volumen prediction of loblolly pine to any merchantable limit*. For. Sci., 26(1), 70-80.

FIGUEREDO-FILHO, A.; BORDERS, B.E.; HITCH, K.L.; (1996). *Taper equations for Pinus taeda planatations in Southern Brazil*. For. Ecol. Manage. 83: 39-46.

GADOW, Kv., HUI, G.; (1999). *Modelling Forest Development*. Kluwer Academic Publishers. 213 pp. Netherlands.

MARTIN, A.J.; (1981). *Taper and volume equations for selected Appalachian hardwood species*. USDA Forest Serv Resp Pap NE-490, 22 pp.

REED, D.D.; GREEN, E.J.; (1984). *Compatible stem taper and volume ratio equations*. For. Sci., 30: 977-990.

TRINCADO, G.,GADOW, K.v., SANDOVAL, V.; (1997). *Estimación de volumen comercial en latifoliadas*. Bºosque 18 (1): 39-44. Chile.

TRINCADO, G., GADOW, K.v., TEWARI, V.P.; (1996). *Comparación of three stem profile equations for Quercus robur L*. Suid-Afrikanse Bosboutydskrif, nr. 177, pp. 23-29. Sudafrica.

SAS INSTITUTE INC (1999). *SAS/STAT TM User's Guide, Relase 8.0 Edition*. Cary. N.C. USA.