

FUNCIONES DE PERFIL DEL TRONCO PARA *Pinus sylvestris* L. EN GALICIA

N. NOVO; F. CASTEDO; J.G. ÁLVAREZ, A. ROJO

Departamento de Enxeñería Agroforestal. Escola Politécnica Superior de Lugo. U.S.C.
Campus Universitario s/n. 27002. Lugo.

RESUMEN

Se han ajustado seis funciones de perfil del tronco a los datos de diámetros medidos a diferentes alturas obtenidos de una muestra de árboles de *Pinus sylvestris* L. en Galicia. Estas funciones pertenecen a 5 categorías de modelos distintos (polinómicos simples, polinómicos segmentados, potenciales, de exponente variable y trigonométricos). Las ecuaciones obtenidas se han comparado y validado empleando una muestra independiente de árboles, con el fin de determinar el modelo que mejor se adapta al perfil real del tronco para la especie en esta Comunidad Autónoma. La validación de los ajustes se ha realizado empleando medidas de error y sesgo. Finalmente, la evaluación realizada indica que los mejores resultados corresponden al modelo de exponente variable de Kozak, desarrollado en 1988, y al modelo potencial de Demaerschalk, de 1972.

P.C.: Funciones de perfil, *Pinus sylvestris* L., Galicia

SUMMARY

Six taper functions were fitted to diameter at different heights data from a sample of *Pinus sylvestris* L. in Galicia (Northwestern Spain). These functions belong to 5 categories (single polynomial, segmented polynomial, power, exponential, variable exponent and trigonometric taper functions). The equations obtained were compared to evaluate its performance and were validated using an independent sample of trees to determine the best model. The comparisons were based on their bias and error. The best models were developed by Kozak in 1988 and Demaerschalk in 1972.

K.W.: Taper functions, *Pinus sylvestris* L., Galicia

INTRODUCCIÓN

La presencia de pino silvestre en Galicia se ve relegada a repoblaciones en las provincias de Lugo y Orense. En el avance del Tercer Inventario Forestal Nacional la superficie ocupada por dicha especie en masas puras se estima en 60.000 ha y se encuentra entre cotas de 800 a 1.200 metros.

Las funciones de perfil son relaciones matemáticas entre los diámetros o secciones del tronco, en cualquier punto del mismo, y la altura a la que se encuentran. Su principal utilidad es la obtención de tarifas de cubicación con clasificación de productos, que son ecuaciones que permiten estimar el volumen de los árboles y, por tanto, de las masas para los diferentes destinos de la madera cuando las dimensiones (diámetros y longitudes) marcan dichos destinos.

En el presente trabajo se analiza el comportamiento de algunas de las funciones de perfil más utilizadas a partir de datos de árboles de *Pinus sylvestris* L. de masas gallegas.

MATERIAL Y MÉTODOS

Datos utilizados

La muestra de datos empleados en este trabajo proviene de 236 árboles extraídos de repoblaciones de *Pinus sylvestris*, con edades comprendidas entre 10 y 50 años. Para cada parcela de muestreo se seleccionaron y midieron dos árboles tipo que se eligieron cumpliendo la condición de que su altura no difiriese de la altura dominante de la masa en $\pm 10\%$ y que no presentasen ningún defecto de forma.

Antes del apeo de los árboles tipo, se midió el diámetro normal en cruz con forcípula milimétrica y el espesor de corteza a 1,30 m. Una vez apeados y desramados los árboles, se midió con cinta métrica su altura total y la altura del tocón.

La longitud y el número de trozas varió en función de la altura del árbol, aunque como norma general se procuró cortar la primera y segunda troza de 2,5 m, y la tercera y sucesivas hasta el ápice de 1 m. En cada una de las dos caras de las trozas se realizaron las siguientes mediciones: diámetro en cruz en centímetros, espesor de corteza en milímetros y longitud de la troza con aproximación al decímetro. Por último, se estimaron los volúmenes totales con y sin corteza cubicando cada troza por la fórmula de Smalian.

Finalmente se obtuvieron 2.249 pares de datos con diámetro (d) con corteza a una cierta altura

(h). La muestra de árboles fue dividida en dos subconjuntos de forma aleatoria. El primero de ellos estaba formado aproximadamente por el 70% del total (163 pies y 1.565 pares diámetro-altura) y se utilizó para realizar el ajuste de las funciones de perfil analizadas. Los árboles restantes (67 pies y 684 pares diámetro-altura) se consideraron como una muestra independiente y se emplearon en la fase de validación de los modelos.

En la Tabla 1 se presentan los valores medio, máximo y mínimo, así como la desviación típica de las principales variables dendrométricas y dasométricas del total de la muestra y de cada uno de los subconjuntos en que fue dividida.

Nomenclatura empleada

La terminología empleada en la descripción de los modelos utilizados ha sido la siguiente:

d = diámetro con corteza correspondiente a la altura h (cm).

D = diámetro normal con corteza (cm).

h = altura (m), desde la base del árbol hasta el punto donde se alcanza el diámetro d .

H = altura total del árbol (m).

a_i , b_i , c = coeficientes a determinar mediante el ajuste.

$$X = \frac{H - h}{H - 1,30} \quad T = \frac{h}{H} \quad Z = \left(\frac{H - h}{H} \right) \quad p = 100 \cdot \frac{hi}{H}$$

donde hi es la altura, en metros, medida desde la base del árbol, a la cual se encuentra el primer punto de inflexión teórico de la curva de perfil del tronco. Según diferentes autores, esta transición se produce en una zona comprendida entre un 20% (VALLEJOS *et al.*, 1998) y un 25% (DEMAERSCHALK & KOZAK, 1977) de la altura total del árbol. En este caso se ha considerado un 25%.

Modelos analizados

Se han utilizado 6 modelos diferentes que, por sus características, se han agrupado en las siguientes cinco categorías:

(1) *Modelos polinómicos simples*: se encuadran en esta categoría todos aquellos en los que el diámetro relativo (cociente entre el diámetro a la altura h y el diámetro normal), o su cuadrado, se estiman a partir de la altura relativa (cociente entre la altura h y la altura total) mediante una única función polinómica válida para todo el tronco del árbol. De ellos se seleccionó el modelo propuesto por KOZAK (1969). La expresión matemática de este modelo aparece en la Tabla 2.

(2) *Modelos polinómicos segmentados*: este grupo incluye todos los modelos en los que la función $d = f(h)$ se obtiene por la unión de varias funciones polinómicas a lo largo del perfil, imponiendo condiciones de continuidad de la curva y sus dos primeras derivadas. El modelo de este tipo analizado (Tabla 2) fue el propuesto por MAX & BURKHART (1976). Éste es un modelo polinómico segmentado que ajusta tres funciones a lo largo del tronco, imponiendo la condición de continuidad de la curva y sus dos primeras derivadas en los puntos de contacto, a_1 y a_2 . Donde:

$$I_i = 1 \quad \text{si } a_i \geq \left(\frac{h}{H} \right)$$

$$I_i = 0 \quad \text{si } a_i < \left(\frac{h}{H} \right) \quad \text{donde } i = 1 \text{ ó } 2$$

(3) *Modelos potenciales*: en estos modelos el diámetro relativo es función de la altura o de la altura relativa elevada a un cierto parámetro constante. Se ha analizado el modelo de DEMAERSCHALK (1972) cuya expresión aparece en la Tabla 2.

(4) *Modelos de exponente variable*: su base es la misma que la de los potenciales, con la

salvedad de que el exponente varía a medida que cambia la altura del tronco analizada, es decir, el exponente es, en sí mismo, una función de la altura (FORSLUND, 1990). Se han analizado los modelos de KOZAK (1988) y MUHAIRWE (1999); en la Tabla 2 figuran sus expresiones matemáticas.

(5) *Modelos trigonométricos*: están basados en el empleo de funciones trigonométricas. La ecuación de este grupo utilizada (Tabla 2) es la más representativa de este tipo de modelos, y fue propuesta por THOMAS & PARRESOL (1991). Esta función presenta el inconveniente de no estar definida cuando la altura es igual a cero, es decir, en la estimación del diámetro en la base.

Metodología de ajuste y validación

En los modelos lineales en los parámetros, o fácilmente linealizables mediante logaritmos, se ha realizado un ajuste por mínimos cuadrados ordinarios empleando el procedimiento REG del paquete estadístico SAS/STAT™ (SAS INSTITUTE INC, 1999).

Los modelos polinómicos segmentados, exponenciales y trigonométricos, no son lineales en los parámetros, por lo que su ajuste se ha llevado a cabo empleando el procedimiento NLIN del mismo programa estadístico, utilizando el método iterativo DUD (Don't Use Derivatives) propuesto por RALSTON & JENRICH (1978). Se han utilizado como valores de partida de los parámetros para iniciar la iteración los obtenidos por otros autores en trabajos de similares características.

La comparación de las estimaciones de los modelos se ha basado, tanto en la fase de ajuste como en la de validación, en el análisis de los residuos (E_i) y en el estudio de cuatro estadísticos obtenidos a partir de ellos: por una parte el sesgo ($\bar{E}$), que evalúa la desviación del modelo con respecto a los valores observados, y por otra parte el error medio cuadrático (EMC), la desviación estándar de los residuos (S) y la media de los valores absolutos de los residuos ($|\bar{E}|$), que analizan la precisión de las estimaciones. Las comparaciones en la fase de validación se han completado con la inclusión de un nuevo estadístico de precisión, la eficiencia del modelo (MEF). Se ha escogido como variable dependiente para la comparación de los modelos el diámetro a una cierta altura (d).

Las expresiones de los estadísticos comentados anteriormente son las siguientes:

$$\text{Sesgo } (\bar{E}): \bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^N E_i}{N}$$

$$\text{Error medio cuadrático (EMC): } EMC = \frac{\sum_{i=1}^N (E_i)^2}{N - q - 1}$$

$$\text{Desviación estándar de los residuos (S): } S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (E_i - \bar{E})^2}{N - 1}}$$

$$\text{Media de los valores absolutos de los residuos } (|\bar{E}|): |\bar{E}| = \frac{\sum_{i=1}^N |E_i|}{N}$$

$$\text{Eficiencia del modelo (MEF): } MEF = \frac{\sum_{i=1}^N (E_i)^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Siendo N el número de datos usados en el ajuste del modelo; q el número de parámetros del modelo; $E_i = Y_i - \hat{Y}_i$ con Y_i , $\hat{Y}_i$ e $\bar{Y}_i$ el valor observado, predicho y promedio de d , respectivamente.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Fase de ajuste

En la Tabla 3 se muestran los valores de los parámetros estimados por regresión para cada uno de los modelos ajustados, y en la Tabla 4 se presentan los valores de los estadísticos de comparación obtenidos para cada una de las ecuaciones considerando la totalidad del tronco. Se incluyen también los valores del coeficiente de determinación (R^2) que, si bien no sirve como estadístico comparativo entre modelos (ya que no está basado en la misma variable dependiente), sí da una idea de la calidad del ajuste.

Analizando los resultados obtenidos se observa que el modelo polinómico simple de KOZAK (1969) es el que tiene un menor sesgo; sin embargo, su error medio cuadrático es muy elevado. El modelo de exponente variable de KOZAK (1988) y el modelo potencial de DEMAERSCHALK (1972) son los que presentan mejores resultados de los estadísticos de comparación.

Fase de validación

Se han comprobado para la fase de validación los 6 modelos probados en la fase de ajuste. En la Tabla 5 aparecen reflejados los valores de los estadísticos obtenidos para la nueva muestra de árboles. Se observa que todos los modelos presentan un comportamiento análogo al de la fase de ajuste.

Los mejores estadísticos en la fase de validación de todas las funciones analizadas se obtienen nuevamente en el modelo de exponente variable de KOZAK (1988) y en el modelo potencial de DEMAERSCHALK (1972). NEWNHAM (1992) y MUHAIRWE *et al.* (1994) achacan los buenos resultados del modelo de Kozak a la inclusión de la variable D/H , ya que está relacionada con características del árbol como la longitud y el ratio de copa, que influyen en gran medida en el perfil del tronco, sobre todo en coníferas.

CONCLUSIONES

Se puede concluir que, de todos los modelos probados en el presente trabajo, el de exponente variable propuesto por KOZAK (1988) y el potencial de DEMAERSCHALK (1972) son los que mejor estiman el perfil de *Pinus sylvestris* L. en Galicia.

El modelo de Kozak tiene el inconveniente de no ser integrable analíticamente ni poseer función inversa generalizada, por lo que presenta limitaciones para determinar volúmenes a dos alturas cualquiera del tronco y para estimar a qué altura se alcanza un determinado diámetro.

El modelo de Demaerschalk presenta unos resultados de los estadísticos de ajuste y validación similares al modelo anterior, y además tiene la ventaja de que su expresión analítica permite obtener tarifas de cubicación con clasificación de productos (CASTEDO, 1999).

BIBLIOGRAFÍA

- CASTEDO, F.; (1999). *Análisis de funciones de perfil de tronco y construcción de tarifas de cubicación con clasificación de productos para Pinus radiata D. Don. en Galicia*. Proyecto fin de carrera de ingeniería de montes. Universidad de Santiago de Compostela (Inédito).
- DEMAERSCHALK J. & KOZAK A.; (1977). *The whole bole system: a conditioned dual-equation system for precise prediction of tree profiles*. Can. J. For. Res., 7: 488-497.
- DEMAERSCHALK J.; (1972). *Converting volume equations to compatible taper equations*. For. Sci., 18 (3): 241-245.
- FORSLUND R.; (1990). *The power function as a simple stem profile examination tool*. Can. J. For. Res., 21: 193-198.
- KOZAK A.; (1988). *A variable-exponent taper equation*. Can. J. For. Res., 18, 1.363-1368.
- MAX T. & BURKHART H.; (1976). *Segmented polinomial regression applied to taper equations*. For. Sci., 22: 283-289.
- MUHAIRWE, C.; (1999). *Taper equations for Eucalyptus pilularis and Eucalyptus grandis for the north coast in New south Wales, Australia*. Forest Ecology and Management, 113: 251-269.
- MUHAIRWE C.; LEMAY V.; KOZAK A.; (1993). *Effects of adding tree, stand, and site variables to Kozak's variable-exponent taper equation*. Can. J. For. Res., 24: 252-259.

- NEWNHAM R.; (1992). *Variable-form taper functions for four Alberta tree species*. Can. J. For. Res., 22: 210-223.
- RALSTON M. & JENRICH R.; (1978). *DUD, a derivative-free algorithm for non linear least squares*. Technometrics, 20: 7-14.
- SAS INSTITUTE INC.; (1999). *SAS/STATTM User's Guide, Release 8.0 Edition*. Cary.N.C. USA.
- THOMAS C. & PARRESOL B.; (1991). *Simple, flexible, trigonometric taper equations*. Can. J. For. Res., 21: 1.132-1.137.
- VALLEJOS O.; MENDOZA M.; ROJAS M.; (1998). *Función de ahusamiento para Eucalyptus delegatensis R. T. Baker. Fundo El Picazo, VII Región, Chile*. Actas del Primer Congreso Latinoamericano IUFRO: "El manejo sustentable de los recursos forestales, desafío del siglo XXI".

Tabla 1. Características de los datos de ajuste y validación.

	MUESTRA TOTAL (N = 236)				SUBMUESTRA PARA AJUSTE (N = 163)				SUBMUESTRA PARA VALIDACIÓN (N = 73)			
Variable	Media	Desv. típica	Máximo	Mínimo	Media	Desv. típica	Máximo	Mínimo	Media	Desv. típica	Máximo	Mínimo
D (cm)	23,34	5,96	36,5	6,6	21,82	6,27	35,30	4,70	22,29	6,20	36,50	4,70
H (m)	11,03	3,92	20,3	3,2	10,34	4,16	20,52	2,76	10,55	4,09	20,52	2,76
D/H	2,2186	0,3920	3,1746	1,4046	2,2224	0,4403	3,47	1,40	2,2198	0,4066	3,4727	1,3983
Vcc (dm ³)	272,83	192,93	805,81	15,42	235,62	180,77	829,15	8,62	247,07	184,98	829,16	8,63
Vsc (dm ³)	236,54	173,66	726,05	13,08	205,67	165,05	749,50	5,91	215,17	167,98	749,51	5,92
Edad (años)	34,04	8,96	48	10	31,41	8,11	50,00	12,00	32,22	8,45	50	10

Tabla 2. Funciones de perfil analizadas.

MODELO	EXPRESIÓN
KOZAK (1969)	(1) $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = b_1 \cdot (T-1) + b_2 \cdot (T^2 - 1)$
MAX & BURKHART (1976)	(2) $\left(\frac{d}{D}\right)^4 = b_1 \cdot \left(\frac{h}{H} - 1\right) + b_2 \cdot \left(\frac{h^4}{H^4} - 1\right) + b_3 \cdot \left(a_1 - \frac{h}{H}\right)^2 \cdot I_1 + b_4 \cdot \left(a_1 - \frac{h}{H}\right)^2 \cdot I_1$
DEMAERSCHALK (1972)	(3) $d = b_1 \cdot D^{b_2} \cdot (H - h)^{b_3} \cdot H^{b_4}$
KOZAK (1988)	(4.1) $d = a_1 \cdot D^{a_2} \cdot a_3^D \cdot \left[\frac{1 - \sqrt{T}}{1 - \sqrt{0.25}} \right]^{[b_1 \cdot T^2 + b_2 \cdot \ln(T + 0.001) + b_3 \cdot \sqrt{T} + b_4 \cdot e^T + b_5 \cdot \left(\frac{D}{h}\right)]}$
MUHAIRWE (1999)	(4.2) $d = a_0 D^{a_1} (1.3/h)^c$; $c = b_0 + \frac{b_1}{h^2} + b_2 h^5 + b_3 \left(\frac{D}{h}\right) + b_4 \left(\frac{h}{D}\right)$
THOMAS & PARRESOL (1991)	(5) $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = b_1 \cdot (T-1) + b_2 \cdot \text{sen}(c \cdot \pi \cdot T) + b_3 \cdot \cot\left(\frac{\pi \cdot T}{2}\right)$

Tabla 3. Valores de los parámetros estimados mediante el análisis de regresión.

MODELO	b ₀	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	c
(1)		-3,08569	1,55066	-	-	-		-	-		
(2)		-2,6805	1,2502	293,2	-264,2	-		0,2024	0,2103		
(3)		1,9516	0,8285	0,8937	-0,8811	-		-	-		
(4.1)		0,0139	0,00952	-0,6304	0,4614	0,1198		2,7378	0,5115	1,0159	
(4.2)	0,1119	7,992E-6	7,34E-8	-0,00004	1,4119	-	0,4551	1,2497			
(5)		-0,9747	0,1157	0,00862							2,0790

Tabla 4. Valores de los estadísticos en la fase de ajuste.

MODELO	EMC	S
--------	-----	---

		$\bar{E}$		$ \bar{E} $	R^2
KOZAK (1969)	3,625266	0,01376	1,9027426	1,37938023	0,89820
MAX & BURKHART (1976)	2,583460	-0,3484	1,5659105	1,21257753	0,84348
DEMAERSCHALK (1972)	2,5240	0,03917	1,5861998	1,16781383	0,97129
KOZAK (1988)	1,686827	0,04825	1,2945492	0,92520838	0,98124
MUHAIRWE (1999)	9,6288779	-0,22678	3,08776908	2,47101061	0,89297
THOMAS & PARRESOL (1991)	5,5689749	-1,30607	1,96158292	1,91925434	0,80275

Tabla 5. Valores de los estadísticos en la fase de validación.

MODELO	EMC	$\bar{E}$	S	$ \bar{E} $	MEF
KOZAK (1969)	4,23171921	0,0427551	2,05365011	1,4786233	0,0438461
MAX & BURKHART (1976)	3,12997360	-0,343616	1,72748142	1,2477190	0,0322398
DEMAERSCHALK (1972)	2,97382264	0,1522314	1,71265072	1,2220027	0,0307220
KOZAK (1988)	0,43223736	0,0492236	1,51128381	1,0078831	0,0237598
MUHAIRWE (1999)	12,1820838	- 0,2847831	3,45989407	2,7088001	0,1204679
THOMAS & PARRESOL (1991)	6,28709697	- 1,3696301	2,09045801	1,9259766	0,0624601